

文章编号 1004-924X(2006)06-1009-08

# 动平台惯性参数对柔性并联机构 动力学特性的影响及优化设计

杜兆才, 余跃庆, 苏丽颖  
(北京工业大学 机电学院, 北京 100022)

**摘要:**利用柔性并联机构的动力学模型, 定性分析了动平台质量、转动惯量对柔性并联机构的动态响应、动态应力及固有频率的影响。以动平台惯性参数边界条件、运动误差、固有频率、动态应力、驱动力矩等限制条件作为约束方程, 将机构总质量函数和弹性变形能函数采用线性加权组合成多目标函数, 进行多目标优化设计, 确定了动平台的最佳惯性参数。通过对平面 3-RRR 柔性并联机构算例的分析和讨论, 说明了动平台惯性参数在柔性并联机构的动力学分析和设计中的重要作用。

**关键词:**动平台; 惯性参数; 动态响应; 固有频率; 动态应力; 优化设计

**中图分类号:** TH112; TP242 **文献标识码:** A

## Effects of inertia parameters of moving platform on the dynamic characteristic of flexible parallel mechanism and optimal design

DU Zhao-cai, YU Yue-qing, SU Li-ying

(College of Mechanical Engineering & Applied Electronics Technology,  
Beijing University of Technology, Beijing 100022, China)

**Abstract:** The effects of the inertia parameters of moving platform on the dynamic response, dynamic stress and natural frequency of flexible parallel mechanisms were studied. The mechanism total mass function is combined with elastic deformation energy function by using linear weighted method to derive the multiple objective function, and the boundary condition of inertia parameters, motion errors, natural frequency, dynamic stresses and driving moments are considered as constraint equations to perform the optimal design. The optimal inertia parameters of moving platform are determined based on the optimal design. The effects of the inertia parameters are well illustrated through the numerical simulation of a planar 3-RRR parallel mechanism. The inertia parameters of moving platform are demonstrated to have significant impact on the dynamic response, dynamic stress and natural frequency of flexible parallel mechanisms, and they should be important parameters for the analysis and design of the flexible parallel mechanisms.

**Key words:** moving platform; inertia parameter; dynamic response; natural frequency; dynamic stress; optimal design

收稿日期: 2006-08-21; 修订日期: 2006-09-27.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No. 50575002); 北京市自然科学基金资助项目(No. 3062004)

## 1 引言

并联机构具有高速度、高加速度、承载能力强、能耗低、误差小、精度高、易于控制等一系列优点,在机构领域中占有十分重要的地位,已成为机器人学和机构学领域的热门研究课题。并联机构广泛地应用于多个领域,常作为高精实时测量仪器<sup>[1]</sup>、精密光学仪器<sup>[2,3]</sup>、快速精密加工机床<sup>[4]</sup>等的平台,天文望远镜普遍采用并联机构作为方位调整机构。

高速、轻型化是当今世界机械产品的主要标志和发展趋势,并联机构中的轻质、细长杆件在高速运动时表现出了刚性并联机构所没有的柔性性能,杆件的弹性变形影响原设计的精度;杆件的动态应力使杆件的强度设计成为一个不可忽视的问题;杆件的弹性振动会导致整个机构的冲击、噪声和疲劳。考虑杆件弹性因素的柔性并联机构的研究具有重要的理论和现实意义,已经引起越来越多的研究者的注意<sup>[5-7]</sup>。

由于并联机构的末端操作器(如:测量设备、光学仪器、加工设备、天文望远镜等)及相关的关节配套装置(位于各支链与动平台的连接处)均安装在动平台上,为使柔性并联机构能够正常工作,动平台必须为刚体,而各杆件均为柔性杆。所以,柔性并联机器人实质上是一个多闭环、多柔体与刚体混合的非线性动力学系统,其运动规律比多刚体系统或多柔体系统复杂。目前,柔性并联机构的理论和实验研究还很不成熟<sup>[8-11]</sup>,关于动平台惯性参数对动力学特性的影响的研究尚未见诸文献。

通常,动平台的质量相对较大,而且安装在动平台上的末端操作器及关节配套装置的质量分布比较分散,导致动平台转动惯量较大。由于动平台将各支链连接成一个整体,动平台的惯性参数必然对机构的动力学特性产生不可忽视的影响。

本文旨在研究柔性并联机构的动平台惯性参数对其动力学特性的影响及规律,并针对机构总质量、弹性变形能等目标提出优化策略,为柔性并联机构的设计和控制提供参考和指导。

## 2 柔性并联机构动力学模型

并联机构的主体结构是个多环机构,动平台由数条并联的分支运动链与固定机座相连,见图 1。

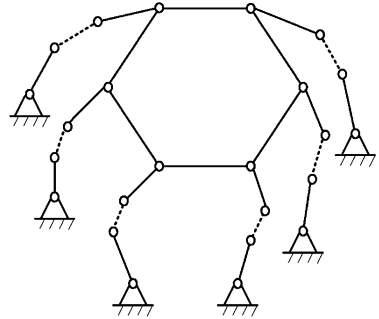


图 1 并联机构结构简图

Fig. 1 Abridged general view of parallel mechanism

首先,采用 KED 方法<sup>[12,13]</sup>和有限元理论,建立柔性并联机构的运动微分方程

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{Q}, \quad (1)$$

式中, $\mathbf{U}$ 、 $\dot{\mathbf{U}}$ 、 $\ddot{\mathbf{U}}$ 分别为系统弹性位移、弹性速度、弹性加速度; $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{K}$ 分别为系统的质量、阻尼和刚度矩阵; $\mathbf{F}$ 为系统惯性力; $\mathbf{Q}$ 为系统外力。

其次,以动平台为研究对象,建立整个系统的动力约束关系

$$\mathbf{M}_p \cdot \ddot{\mathbf{s}}_p + \mathbf{M}_R \cdot \ddot{\mathbf{s}}_R = \sum_{k=1}^N \mathbf{f}_k + \mathbf{Q}, \quad (2)$$

式中, $\mathbf{M}_p$ 、 $\mathbf{M}_R$ 分别为动平台的质量和转动惯量; $\mathbf{s}_p$ 、 $\mathbf{s}_R$ 分别为动平台的线位移和角位移; $N$ 为支链个数; $\sum_{k=1}^N \mathbf{f}_k$ 为各支链作用于动平台的合力。式(2)即为柔性并联机构的动力约束条件。

然后,以各支链与动平台的连接点为研究对象,建立整个系统的运动约束关系

$${}^i\mathbf{U} = {}^j\mathbf{U} + \phi_{ij}(\mathbf{s}_p, \mathbf{s}_R), \quad (3)$$

式中, ${}^i\mathbf{U}$ 和 ${}^j\mathbf{U}$ 分别表示支链 $i$ 、 $j$ 与动平台连接点的弹性位移; $\phi_{ij}(\mathbf{s}_p, \mathbf{s}_R)$ 表示支链 $i$ 、 $j$ 与动平台连接点的相对运动关系,是动平台线位移和角位移的函数。式(3)即为柔性并联机构的运动约束条件。

将系统运动微分方程(1)与系统动力约束条件(2)、系统运动约束条件(3)联立,即得到柔性并联机构的动力学方程,该方程为“增广”的运动微

分方程,格式同方程(1)一致,它真实地描述了柔性并联机构的动力学特性,可由此求解柔性并联机构的频率特性及动力响应。

### 3 动平台惯性参数对动力学特性的影响

#### 3.1 对动态响应的影响

为了精确地反映柔性并联机构的动力学特性及分析动平台惯性参数对动力学特性的影响,在推导机构的动力学方程时,必须考虑动平台惯性参数的影响作用,则机构的动力学方程可改写为:

$$(\mathbf{M}_L + \mathbf{M}_P + \mathbf{M}_R) \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = (\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_P + \mathbf{F}_R) + \mathbf{Q}, \quad (4)$$

式中,下标含L的项为不考虑动平台惯性参数影响的各项;下标含P、R的项分别为受动平台质量、转动惯量影响的各项。

如果不考虑动平台惯性参数的影响,则机构的动力学方程变为

$$\mathbf{M}_L \cdot \ddot{\mathbf{U}}_L + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}}_L + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}_L = \mathbf{F}_L + \mathbf{Q}, \quad (5)$$

由方程(4)、(5)可知,动平台的惯性参数对机构动力学方程中的质量和惯性力均产生了影响。动平台的质量或转动惯量增大,一方面会导致系统的质量增大,可使系统弹性位移减小;另一方面,也会导致其产生的惯性力增大,又产生系统弹性位移增大的趋势。所以,系统弹性位移的变化取决于系统质量和惯性力的相对增幅。如果系统质量的相对增幅较大,则系统弹性位移减小;反之,则系统弹性位移增大。

从系统的能量角度分析,动平台的质量或转动惯量增大会产生两方面的影响:一方面,动平台伴随各杆件振动时会消耗更多的能量,导致分配给各杆件的弹性动能和弹性势能减小,进而导致机构弹性振动的振幅减小及振动频率降低;另一方面,驱动器又必须提供更多的能量以实现预期的运动规律,系统的弹性动能和弹性势能也会随之增大,加剧了系统的振动。振幅及振动频率的变化取决于系统弹性振动总能量和动平台吸收能量的相对增幅。如果弹性振动总能量的相对增幅较大,则系统振动加剧;反之,则系统振动减弱。

#### 3.2 对动态应力的影响

杆件任意截面上的最大正应力的绝对值为

$$\sigma(\bar{x}, t) = \frac{E}{L} |u_0^f(t) - u_1^f(t)| + Eh \left| \sum_i \varphi_i''(\bar{x}) u_i^f(t) \right|, \quad (i=2, 3, 4, 6, 7, 8) \quad (6)$$

其中, $L$ 表示单元长度; $E$ 表示弹性模量; $u_i^f$ 表示弹性变形各分量; $h$ 表示中性层到最外表面的横向距离; $\bar{x}$ 表示应力发生的位置; $t$ 表示时间; $\varphi_i(\bar{x})$ 表示弹性位移的型函数,可通过位移假定导出<sup>[12,13]</sup>。 $\varphi_i''(\bar{x})$ 表示型函数对 $\bar{x}$ 的二阶导数。

由式(6)可知,动态应力取决于杆件的弹性变形,而弹性变形 $u_i^f(t)$ 是弹性位移 $\mathbf{U}$ 的函数,通常,弹性位移越大,则弹性变形越大。所以,动平台惯性参数对动态应力的影响通常类似于对弹性位移的影响。

#### 3.3 对固有频率的影响

柔性并联机构无阻尼弹性振动固有频率为

$$\det |\omega^2 \mathbf{I} - (\mathbf{M}_L + \mathbf{M}_P + \mathbf{M}_R)^{-1} \mathbf{K}| = 0, \quad (7)$$

在此基础上,求解柔性并联机构的阻尼振动的固有频率

$$\omega_{di} = \sqrt{1 - \xi_i^2} \cdot \omega_i, \quad (8)$$

式中, $\omega_{di}$ 和 $\omega_i$ 分别为阻尼振动和无阻尼振动的第 $i$ 阶固有频率; $\xi_i$ 为第 $i$ 阶相对阻尼系数。

方程(7)、(8)说明,如果动平台惯性参数增大,则系统质量增大,会导致系统振动频率降低。

通常,用改变杆件各种参数的办法来调整系统频率,以避免柔性机构产生低阶谐振现象或共振现象<sup>[12,13]</sup>,改善机构的工作状况。由式(7)、(8)可知,也可通过改变动平台惯性参数的办法调整系统的固有频率。相比之下,这种方法的分析过程更简单、易行、快捷,有利于工程实践。

由方程(4)~(8)可知,在保持动平台质量不变的前提下,通过改变动平台的质量分布形式或末端操作器及平台配套装置的质量分配方式等办法,可以改变动平台的转动惯量,由此改变机构的动力学特性和动态响应。这种方法可用于严格限制动平台质量的情况。同样地,对于需要保持动平台转动惯量不变的情况,也可通过类似的办法调整动平台的质量,以得到预期的机构动力学特性和动力响应。

综上所述,动平台惯性参数将对柔性并联机构的动力学特性产生多方面的影响。深入研究动平台惯性参数的影响可以为柔性并联机构的控制和设计提供参考和指导,摸索出便于工程实践的设计方法。

## 4 优化设计

### 4.1 优化目标一:机构总质量最小

通常,构件质量越小,则惯性力越小,在同样的运动学条件下动力学特性越好<sup>[14]</sup>。同时,关节副反力越小,关节驱动力矩下降,有可能使关节驱动装置小型化。目标函数可写为

$$\min W = \sum_{k=1}^n \rho_k A_k L_k + M_P, \quad (9)$$

式中, $W$  为机构总质量(本文中各杆件质量不变,优化目标即为动平台质量); $\rho_k$ 、 $A_k$  和  $L_k$  分别为第  $k$  个杆件的密度、截面积和长度; $n$  为杆件的数量。

### 4.2 优化目标二:总变形能最小

从某种意义上讲,多个关节把弹性杆件和刚性平台连接起来构成了柔性并联机构,动平台会影响各支链杆件的弹性运动,进而影响到系统的柔性,而系统动态响应、固有频率、动态应力与机构系统的柔性密切相关。所以,可把变形能作为机构柔性的特征值。变形能越小,则柔性越小,或者说构件的弹性变形不超过许用值及运动精度要求时承载能力越大。因此,目标函数为

$$\min T = \sum_{k=1}^n T_k, \quad (10)$$

式中, $T$  和  $T_k$  分别表示总变形能和第  $k$  个杆件的变形能。

### 4.3 优化策略

在实际的设计中,单独追求质量轻或柔性小并不合理,必须采用优化策略综合考虑质量和柔性的因素。把总变形能限制在一个合理的范围内,一方面保证机构具有一定的刚度以便完成操作任务,另一方面要求机构能尽可能多地吸收一些变形功,具有一定的能容量,使机构能在特殊运动条件下实现特定的工作载荷<sup>[14]</sup>。所以,优化目标函数  $f(x)$  为两个优化目标的线性加权组合

$$f(x) = \alpha \cdot W(x) + \beta \cdot T(x), \quad (11)$$

式中, $\alpha$  和  $\beta$  为加权因子,反映了两个分目标函数所占的比重,加权因子的选择不仅要考虑到对系统柔性、总质量的综合控制,也要兼顾到使变量变化对目标函数的灵敏度尽量趋向一致,以便得到比较理想的优化结果。 $x$  为设计参变量,包括动平台的质量和转动惯量。

## 4.4 约束条件

首先,将机构末端操作器的运动误差小于预定误差作为主要约束条件;其它的约束条件可以是动平台惯性参数的边界条件、固有频率约束、动态应力约束、驱动力矩约束等。固有频率约束是将固有频率限制在一定范围内,以免引起共振或低阶谐振;动态应力约束是保证杆件最大应力不超过其许用应力;驱动力矩约束是保证各关节驱动力矩不超过驱动装置的额定值。约束条件可写为:

$$s_P \leq s_P^{(H)}, \quad (12)$$

$$s_R \leq s_R^{(H)}, \quad (13)$$

$$M_P^{(L)} \leq M_P \leq M_P^{(H)}, \quad (14)$$

$$M_R^{(L)} \leq M_R \leq M_R^{(H)}, \quad (15)$$

$$\omega^{(L)} \leq \omega \leq \omega^{(H)}, \quad (16)$$

$$\sigma_i \leq \sigma_i^{(H)}, \quad (17)$$

$$\tau_j \leq \tau_j^{(H)}, \quad (18)$$

式(12)~(18)中, $\omega$ 、 $\sigma_i$  和  $\tau_j$  分别表示系统固有频率、第  $i$  个杆件的动态应力和第  $j$  个关节的驱动力矩;上标(L)和(H)分别表示下限和上限。

## 5 数值算例与分析

由于系统的质量矩阵的秩和惯性力列阵的维数较高,构成均比较复杂,所以,无法用数学推导的方法并以显式的形式确定动平台惯性参数对系统动力学特性及动力响应的影响,只能通过数值算例进行分析。

对平面 3-RRR 柔性并联机构进行计算和分析,该机构的参数如下:

各杆的材料均为钢,密度为  $7\ 800\ \text{kg/m}^3$ ,弹性模量为  $2.1 \times 10^{11}\ \text{Pa}$ ,泊松比为 0.3,长度均为 0.2 m,截面积均为  $3\ \text{mm} \times 3\ \text{mm}$ 。每根杆端部的集中质量均为 0.04 kg。三角形动平台的边长均为 0.042 m。机座的坐标分别为  $(-0.3, 0)$ 、 $(0.15, 0.1)$  和  $(0.2, 0)$ 。

目标点为动平台中心点,运动规律为

$$\begin{cases} X = 0.042 \times \cos(\pi \cdot t) \\ Y = 0.25 + 0.042 \times \sin(\pi \cdot t) \quad (t = 0 \sim 4\text{s}) \\ \beta = 0.01 \times \cos(\pi \cdot t/10) \end{cases}$$

其中, $X$  和  $Y$  分别表示动平台质心的  $x$ 、 $y$  轴坐标; $\beta$  表示动平台的方位角。

将机构划分为 6 个单元,共设置 24 个广义坐标,见图 2。

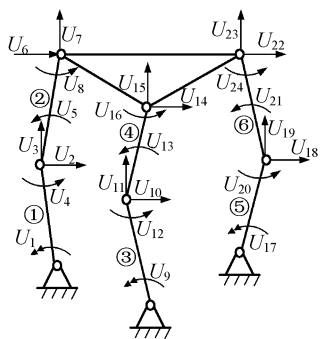


图 2 平面 3-RRR 并联机构广义坐标设置

Fig. 2 Generalized coordinates of 3-RRR parallel mechanism

由于基频通常在整個机构系统的固有频率中占有主导地位,决定了系统的动力特性,而高阶频率的作用相对要弱得多,不起决定作用。所以,图 3 给出了柔性并联机构的基频平均值随着动平台质量(转动惯量随之改变)变化的规律。

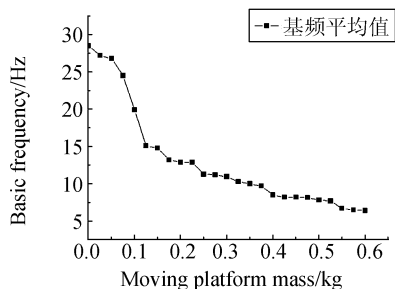


图 3 基频与动平台质量的关系

Fig. 3 Relation between basic frequency and moving platform mass

由图 3 可知,动平台惯性参数的增加会导致机构的柔性增大。因此,基频随着动平台惯性参数的增加而递减。

图 4~5 分别给出了动平台质量为 0、0.1 kg (转动惯量随之变化)时,柔性并联机构基频随时间变化的情况。

由图 4~5 可知,如果不考虑动平台惯性参数,基频会偏高,频率随时间的波动比较平缓。而考虑和增大动平台惯性参数时,基频降低,频率波动也加剧,这主要是由于较大的动平台惯性参数在机构系统的弹性振动过程中,会周期性地吸收和释放更多的弹性振动能量。当吸收能量时,会导致系统振动频率降低;当释放能量时,又可能造成振动频率的波动加剧。

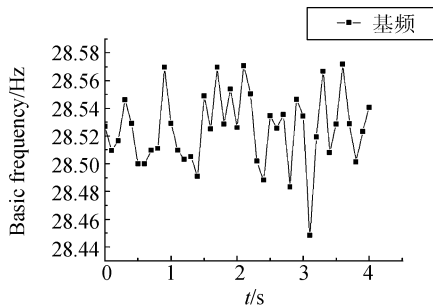


图 4 不计动平台质量时的基频

Fig. 4 Basic frequency without consideration of moving platform mass

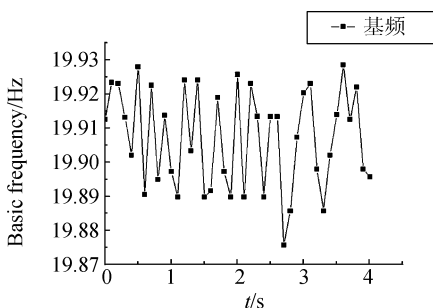


图 5 动平台质量为 0.1 kg 时的基频

Fig. 5 Basic frequency of moving platform mass of 0.1 kg

综上所述,动平台惯性参数对柔性并联机构的固有频率有着重要的影响。

图 6~8 分别给出了动平台质量为 0、0.1 kg、0.2 kg(转动惯量随之变化)时,柔性并联机构目标点运动误差随时间变化的情况。

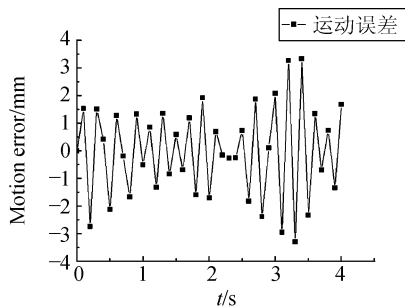


图 6 不计动平台质量时的运动误差

Fig. 6 Motion error without consideration of platform mass

由图 6~8 可知,动平台质量分别为 0、0.1 kg、0.2 kg 时,目标点的最大运动误差分别为 3.3 mm、-2.7 mm、-7.7 mm,误差波动逐渐减

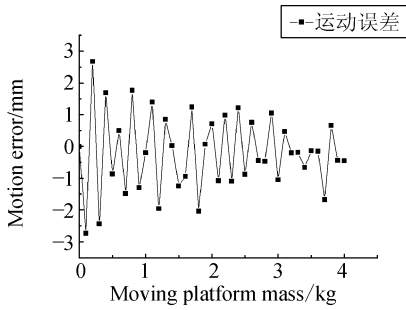


图 7 动平台质量为 0.1 kg 时的运动误差

Fig. 7 Motion error of moving platform mass of 0.1 kg

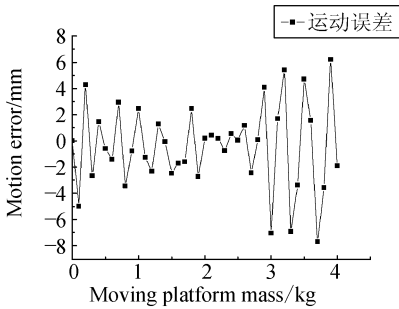


图 8 动平台质量为 0.2 kg 时的运动误差

Fig. 8 Motion error of moving platform mass of 0.2 kg

缓。这是由于动平台惯性参数的变化同时影响系统质量和惯性力。当动平台质量从 0 变化到 0.1 kg 时,系统质量的相对增幅较大,导致运动误差减小;当动平台质量从 0.1 kg 变化到 0.2 kg 时,系统惯性力的相对增幅较大,导致运动误差增大。同时,由于较大的动平台质量、转动惯量在运动时会吸收和释放更多的弹性振动能量,起到了抑制运动波动的作用。所以,随着动平台惯性参数的增大,目标点运动误差的波动逐渐减缓。

在各支链中,主动杆的最大动态应力均远大于从动杆的最大应力。表 1 分别给出了动平台质量为 0、0.1 kg、0.2 kg、0.4 kg(转动惯量随之变化)时,各支链主动杆的最大动态应力。

表 1 各支链主动杆的最大动态应力

Tab. 1 Maximal dynamic stresses of framed links

平台质量	动态应力(MPa)		
	主动杆一	主动杆二	主动杆三
0	99.9	91.4	161.0
0.1 kg	116.9	131.8	154.2
0.2 kg	81.2	109.3	155.8
0.4 kg	190.2	241.0	235.1

通常,杆件的弹性变形越显著,则杆件的动态应力越大。由表 1 可知,当动平台质量(转动惯量)较小时,如 0~0.2 kg,动平台质量(转动惯量)增大并不一定会导致杆件动态应力始终随之增大,说明此时的杆件弹性变形并不随着动平台质量(转动惯量)的增大而增大。但当动平台质量(转动惯量)超过某个值时,如 0.4 kg,杆件动态应力则持续增大,说明这种情况下的杆件弹性变形会一直随着动平台质量(转动惯量)的增大而增大,应避免动平台质量的继续增大。

由图 6~8 和表 1 可见,动平台惯性参数对柔性并联机构动态响应(运动误差)和动态应力的影响与末端负载对柔性串联机构的影响有明显的不同<sup>[15]</sup>。主要原因是由于并联机构属于多环系统,动平台惯性参数对各分支运动链的运动影响程度各异,而各分支运动链有复杂的运动耦合关系,当各运动链的运动耦合关系导致部分弹性变形或弹性位移相互抵消时,系统的动态应力、运动误差会减小;反之,则增大。可见,动平台惯性参数对柔性并联机构运动误差和动态应力有重要的影响,其影响不仅取决于动平台惯性参数的数值,更主要地取决于各分支运动链的运动耦合关系。

将动平台质量限制在 0.2~0.4 kg;动态应力限制在 200 MPa 内;目标点线位移误差和角位移误差分别限制在 5 mm 和 0.017 rad 内,进行优化计算,优化解见表 2。

表 2 优化解的比较

Tab. 2 Results of optimal design

	加权因子		优化解	
	$\alpha$	$\beta$	质量(kg)	惯量(kg $m^2$ )
方案一	1	0	0.216	$1.135 \times 10^{-5}$
方案二	0.75	0.25	0.237	$1.243 \times 10^{-5}$
方案三	0.5	0.5	0.254	$1.367 \times 10^{-5}$
方案四	0.25	0.75	0.318	$1.418 \times 10^{-5}$
方案五	0	1	0.389	$1.486 \times 10^{-5}$

方案一为总质量最轻的单目标函数的优化结果;方案五为变形能最小的单目标函数的优化结果;它们的优化结果分别代表总质量最轻而柔性最大、总质量最大而柔性最小。方案二、三、四将总质量较轻和变形能较小两个目标结合起来进行优化。其中,方案二、四分别侧重于总质量较轻、应变能较小,方案三以同样的权重考虑两个目标。

随着质量权重的降低及变形能权重的增加,在满足各约束条件的前提下,质量递增,而柔性递减。所以,可通过调整加权系数的办法获得满足各方面要求的最佳结构,具体的调整方法将在另外的文章中给出。以方案三为例,质量比方案一仅增加了17.6%,获得了满足各约束条件的质量较轻且变形能较小的最佳结构。因此,多目标优化的策略是合理的、可行的,能够获得满意的结果。

## 6 结 论

借助于平面3-RRR柔性并联机构的数值算例,说明动平台质量、转动惯量是重要的设计参

数,对于柔性并联机构的动态响应、动态应力和频率特性具有重要的影响。为了得到预期的动力学特性,选用合理的动平台惯性参数是非常必要的。

以动平台惯性参数为设计变量,以动平台惯性参数边界条件、运动误差、固有频率、动态应力、驱动力矩等限制条件作为约束方程,针对机构总质量和弹性变形能等多个目标进行优化设计,可得到质量轻且变形能小的最优结构。多目标优化策略为柔性并联机构的优化设计及后续的弹性动力综合和控制的研究奠定了基础。

致谢:感谢北京市教委拔尖人才项目和科技发展项目对本课题的支持。

## 参考文献:

- [1] 刘得军,车仁生,罗小川,等. 坐标测量机的新发展—并联运动机构坐标测量机[J]. 光学精密工程, 2000,8(5): 497-502.  
LIU D J, CHE R SH, LUO X CH, *et al.* New type of CMM—parallel mechanism coordinate measuring machine [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2000,8(5):497-502. (in Chinese)
- [2] 金振林,高峰. 6-SPS球平台并联机器人及其局部力和运动传递性能分析[J]. 光学精密工程, 2001,9(1):63-66.  
JIN ZH L, GAO F. A novel 6-SPS spherical platform parallel robotic mechanism and analysis of its local properties of force and motion transmission[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2001,9(1): 63-66. (in Chinese)
- [3] 赵铁石,高英杰,杨铁林,等. 混合型四自由度并联平台机构及其位置分析[J]. 光学精密工程, 2000,8(1):42-45.  
ZHAO T SH, GAO Y J, YANG T L, *et al.* A novel four-DOF mixed platform mechanism and its position analysis [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2000, 8(1):42-45. (in Chinese)
- [4] 田小静,郑魁敬,赵永生. 5-UPS/PRPU并联机床工作空间分析[J]. 光学精密工程, 2005,13(增刊): 109-113.  
TIAN X J, ZHENG K J, ZHAO Y SH. Workspace analysis of the 5-UPS/PRPU parallel machine tool [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2005,13(supp.): 109-113. (in Chinese)
- [5] BOOK W J. Modeling, design, and control of flexible manipulator arms; a tutorial review [C]. *Proceedings of the 29<sup>th</sup> IEEE Conference on Design and Control*, 1990: 500-506.
- [6] GAULTIER P E. Modeling of flexible manipulator dynamics; a literature survey [C]. *1<sup>st</sup> Nat. Applied Mechanics Conference Cincinnati*, 1989, 2C-3: 1-10.
- [7] KANG B, MILLS J K. Dynamic modeling of structurally-flexible planar parallel manipulator [J]. *Robotica*, 2002, 20: 329-339.
- [8] YANG Z, SADLER J P. On issues of elastic-rigid coupling in finite element modeling of high-speed machines [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2000, 35: 71-82.
- [9] FATTAH A, MISRA A K, ANGELES J. Dynamics of a flexible-link planar parallel manipulator in cartesian space [C]. *20<sup>th</sup> Design Automation Conference*, 1994: 483-490.
- [10] WANG X Y. *Dynamic modeling, experimental identification, and active vibration control design of a “smart parallel manipulator”* [D]. Graduate Department of Mechanical and Industrial Engineering University of Toronto, Toronto, Canada, 2005.
- [11] PIRAS G. *Dynamic finite-element analysis of a planar high-speed, high-precision parallel manipulator with flexible links* [D]. Graduate Department of Mechanical and Industrial Engineering University of Toronto, Toronto, Canada, 2003.
- [12] 张策,黄永强,王子良,等. 弹性连杆机构的分析与设计 [M]. 北京:机械工业出版社, 1997.

- ZHANG C, HUANG Y Q, WANG Z L, *et al.* *Analysis and design of elastic linkages* [M]. Beijing: China Machine Press, 1997. (in Chinese)
- [13] 余跃庆, 李哲. 现代机械动力学 [M]. 北京:北京工业大学出版社, 2001.  
YU Y Q, LI ZH. *Modern dynamics of machinery* [M]. Beijing: Press of Beijing University of Technology, 2001. (in Chinese)
- [14] 吴振彪. 柔性结构机器人优化设计 [J]. 机器人, 1989, 3(1): 12-16.  
WU ZH B. Optimum design of robot with structure flexibility [J]. *Robot*, 1989, 3(1): 12-16. (in Chinese)
- [15] 张绪平, 余跃庆. 集中质量对柔性空间机器人振动特性的影响 [J]. 机械科学与技术, 1999, 18(1): 80-82.  
ZHANG X P, YU Y Q. The effects of vibration property and lumped mass on spatial manipulators with flexible joints and links [J]. *Mechanical Science and Technology*, 1999, 18(1): 80-82. (in Chinese)

**作者简介:**杜兆才(1972—),男,博士研究生。研究领域:机器人学,机器人动力学。E-mail:duzhaocai@emails.bjut.edu.cn.

余跃庆(1958—),男,教授。研究领域:机构学,机器人学,机器人动力学。

苏丽颖(1975—),女,讲师,研究领域:多机器人协调,机器人控制,传感器融合技术。